1.1.14 Kvadratické rovnice (dosazení do vzorce) I

Předpoklady: 010110

Rovnicí se nazývá vztah rovnosti mezi hodnotami dvou výrazů obsahujících jednu nebo více neznámých. V této kapitole se budeme zabývat pouze kvadratickými rovnicemi s jednou neznámou (označenou například x).

Trochu si přiblížíme neznámá slova v předchozích větách:

- **neznámá, proměnná**: znak (většinou písmenko, nejčastěji x), který představuje „žolíka“, na jehož místo můžeme dosazovat různá čísla,
- **výraz**: skoro všechno, co dokážeme sestavit z čísel, proměnných a matematických operací, když místo proměnných dosadíme čísla, je možné ho spočítat a tak určit jeho hodnotu,
- **rovnice**: mezi dva výrazy napíšeme znak rovná se, který znamená, že hodnoty výrazů na obou stranách mají být stejné.

Kvadratická rovnice: každá rovnice, která obsahuje člen s druhou mocninou neznámé (takzvaný kvadratický člen) a neobsahuje jinou mocninu neznámé než první.

Př. 1: Urči, které rovnice jsou kvadratické.

a) $x^2+3x-15=0$ b) $2x+x\sqrt{2}=\pi^2+3x$

c) $x^3-2x^2=9$ d) $x^2+2x-\sqrt{5}$

e) $(x+1)(x-3)=x$

a) $x^2+3x-15=0 \Rightarrow$ je kvadratická.

b) $2x+x\sqrt{2}=\pi^2+3x \Rightarrow$ není kvadratická, neobsahuje druhou mocninu x (na druhé mocnině π nezáleží, π je číslo).

c) $x^3-2x^2=9 \Rightarrow$ není kvadratická, obsahuje třetí mocninu (říká se jí kubická, hádej proč).

d) $x^2+2x-\sqrt{5} \Rightarrow$ nejde o kvadratickou rovnici, protože neobsahuje znak rovnosti a nejedná se tedy vůbec o rovnici, nýbrž pouze o výraz.

e) $(x+1)(x-3)=x \Rightarrow$ musíme upravit roznásobením $x^2-3x+x-3=x \Rightarrow x^2-3x-3=0$ $\Rightarrow$ je kvadratická.

Řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ **najdeme pomocí vzorce** $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Důležité je pochopit význam písmen a, b a c ve vzorci. Když převedeme všechny členy rovnice na levou stranu, získáme rovnici, kde:

- **písmeno *a*** zastupuje všechna čísla, kterými je v rovnici násobeno x^2 (v rovnici $2x^2-x-6=0$ je tedy $a=2$),
- **písmeno *b*** zastupuje všechna čísla, kterými je násobeno x (v rovnici $2x^2-x-6=0$ je $b=-1$),
- **písmeno *c*** zastupuje celý zbytek rovnice – čísla, kterými není násobena žádná mocnina neznámé *x* (v rovnici $2x^2-x-6=0$ je $c=-6$).

Hodnoty konstant snadno rozeznáme, když si konkrétní a obecný tvar napíšeme pod sebe.

$$ax^2+\ bx\ \ \ \ +c\ =0$$
$$2x^2+(-1)x+(-6)=0$$

Pedagogická poznámka: Při vysvětlování významů jednotlivých koeficientů na příkladu rovnice $2x^2-x-6=0$ nastanou samozřejmě problémy se zápornými čísly. Koeficient $b=-1$ určí většina třídy špatně, u koeficientu $c=-6$ už chybu neudělají. Přesto se při řešení příkladu 2 opět objeví několik výsledků $b=3$. Těm, kteří tuto chybu udělají, se snažím vysvětlit, že se právě ukázal obecný nedostatek v jejich uvažování, kdy se nepoučili ze své předchozí chyby.

Př. 2: Urči hodnoty koeficientů *a*, *b*, *c* pro kvadratické rovnice.
a) $x^2+2x=3$ b) $2x^2-3x=0$.

a) Upravíme: $x^2+2x-3=0$.
Platí: $x^2+2x-3=1\cdot x^2+2\cdot x+(-3)=0$.

$a=1$ (číslo před x^2)
$b=2$ (číslo před x)
$c=-3$ (číslo, které je samotné)

b) Platí: $2x^2-3x=2x^2+(-3)x+0=0$.

$a=2$ (číslo před x^2)
$b=-3$ (číslo před x)
$c=0$ (číslo, které je samotné)

Př. 3: Urči hodnoty koeficientů *a b*, *c* pro kvadratické rovnice.
a) $(x-2)(x+3)=2x^2-3$ b) $-2x^2-3x+\sqrt{2}x-\sqrt{5}=x-4$

a)
Rovnici musíme převést na základní tvar $ax^2+bx+c=0$ $\Rightarrow$ roznásobíme a na pravé straně vyrobíme 0.

$$(x-2)(x+3)=2x^2-3$$
$$x^2+3x-2x-6=2x^2-3$$
$$-x^2+x-3=0$$

Platí $a=-1$; $b=1$; $c=-3$.

b)
Rovnici upravíme na tvar s nulovou pravou stranou: $-2x^2-3x+\sqrt{2}x-\sqrt{5}=x-4$.

$$-2x^2-4x+\sqrt{2}x+4-\sqrt{5}=0$$

Na levé straně vytkneme neznámou x z členů, které ji obsahují, abychom lépe viděli, které číslo před ní stojí: $-2x^2+x\left(\sqrt{2}-4\right)+4-\sqrt{5}=0$.

Z předchozího je jasné, že platí $a=-2;\ \ b=\sqrt{2}-4;\ \ c=4-\sqrt{5}$.

Pedagogická poznámka: b) dělá studentům velké problémy zejména proto, že se snaží odstranit odmocniny. Nepovažují je totiž za dostatečně správná čísla. Je třeba zdůraznit, že odmocniny jsou zcela normální čísla a není nutné, aby k nim měli speciální přístup.
Nepovažuji v tomto okamžiku za reálné, aby všichni studenti ve třídě dokázali tento příklad samostatně vyřešit (vytknutí x je pro mnohé poněkud těžké sousto). Přesto v tomto okamžiku neobsahuje učebnice více podobných příkladů, protože se snažím koncentrovat na hlavní cíl hodiny (dosazování). Zní to sice divně, ale říkám to i studentům, že není reálné očekávat, že i ti, kteří jsou připravení velmi špatně, budou schopni v tomto okamžiku stíhat všechno. Důležité je, aby se naučili samostatně pracovat, postupně se zlepšovali a byli schopni stíhat všechno od kapitoly 1.6. Mocniny.

Př. 4: Vyřeš kvadratickou rovnici $x^2-x-6=0$.

$x^2-x-6=0 \Rightarrow a=1; b=-1;\ c=-6$. Teď můžeme dosadit.

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-6)\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$$x_1=\frac{1+5}{2}=3 \qquad x_2=\frac{1-5}{2}=-2$$

Zápis $x_{1,2}$ znamená, že rovnice může mít dvě řešení x_1 a x_2.

Pedagogická poznámka: Teprve při řešení předchozího příkladu se pozná, co všechno žáci nechápali a báli se zeptat (co znamená 12 u x na začátku vzorce, co mají udělat se znaménkem $\pm$, atd.).

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu se krásně pozná (pokud vydržíte a opravdu ho neukážete na tabuli), jak byli studenti vedeni k opravdu samostatnému počítání. V jedné ze tříd nedokázal tento příklad spočítat na první pokus nikdo. I přesto, že bylo vidět, že počítají vcelku dobře, všichni udělali při výpočtu nějakou chybičku (někteří už při opisování zadání), kterou neměli při výpočtu možnost opravit podle tabule.
Určitě se projeví všichni, kteří počítat neumějí (a minimálně na naší škole jich přibývá) a je jasné, že není v jejich silách dopočítat zbytek hodiny včas. Přesto považuji za dostačující, když spočítají sami alespoň něco, snažím se jim vysvětlovat, že dohnat cvik ve výpočtech je běh na dlouhou trať a není nic fatálního na tom, že v tomto okamžiku to vypadá beznadějně.
Pokud se následující příklady nestihnou všechny, probírám je v další hodině, kde vynechám příklady z její první části.

Př. 5: Vyřeš kvadratické rovnice.

a) $-x^2-2x+3=0$ b) $5x^2+9x=2$

c) $2x^2 - 4x + 2 = 0$ d) $x^2 - x = 0$

e) $x^2 - 4 = 0$ f) $x^2 + 12x + 20 = 0$

a) $-x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow a = -1; b = -2; c = 3$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

$x_1 = \frac{2-4}{-2} = 1$ $x_2 = \frac{2+4}{-2} = -3$

b) Musíme získat na pravé straně nulu.

$5x^2 + 9x = 2$

$5x^2 + 9x - 2 = 0 \Rightarrow a = 5; b = 9; c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot(-2)\cdot 5}}{2\cdot 5} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{10} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{10}$$

$x_1 = \frac{-9-11}{10} = -2$ $x_2 = \frac{-9+11}{10} = \frac{1}{5}$

c) $2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow a = 2; b = -4; c = 2$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-16}}{4} = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{4}$$

$x_1 = \frac{+4-0}{4} = 1$ $x_2 = \frac{+4+0}{4} = 1$

Diskriminant (výraz ve vzorci pod odmocninou) je roven nule a rovnice tak má pouze jedno řešení.

d) $x^2 - x = 0 \Rightarrow a = 1; b = -1; c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-0}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$x_1 = \frac{1-1}{2} = 0$ $x_2 = \frac{1+1}{2} = 1$

e) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 0;\ c = -4$

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot(-4)\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{0+16}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{0 \pm 4}{2}$$

$x_1 = \frac{0-4}{2} = -2$ $x_2 = \frac{0+4}{2} = 2$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý a neměl by se vynechávat. Pětina studentů ho řeší špatně, když stanoví $a = 1; b = -4; c = 0$.

f) $x^2 + 12x + 20 = 0 \Rightarrow a = 1;\ b = 12;\ c = 20$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 20\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-12 \pm 8}{2}$$

$x_1 = \frac{-12-8}{2} = -10$ $x_2 = \frac{-12+8}{2} = -2$

Pedagogická poznámka: Některé z předchozích příkladů je samozřejmě možné řešit elegantněji vytýkáním. Pokud s tím někdo přijde, nebráním mu, pochválím ho, ale trvám na tom, aby si vyzkoušel i dosazení a svůj způsob použil na kontrolu. Třídě tyto způsoby nevysvětluji, snažím se nehonit příliš mnoho zajíců najednou.

Shrnutí: Pokud správně určíme koeficienty, získáme řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.